Digitaltechnik
FHDW 1.Q 2007

TEIL II

Übersicht 4 - 6

4 Schaltungsanalyse

4.1 Wahrheitstabellen

4.2 Funktionsgleichungen

5 Schaltalgebra

5.1 Grundgesetze

5.2 Rechenregeln

5.3 NAND- und NOR-Funktion

5.4 Rechenbeispiele

6 Schaltungsvereinfachung

6.1 ODER- Normalform

6.2 UND-Normalform

6.3 KV-Diagramme

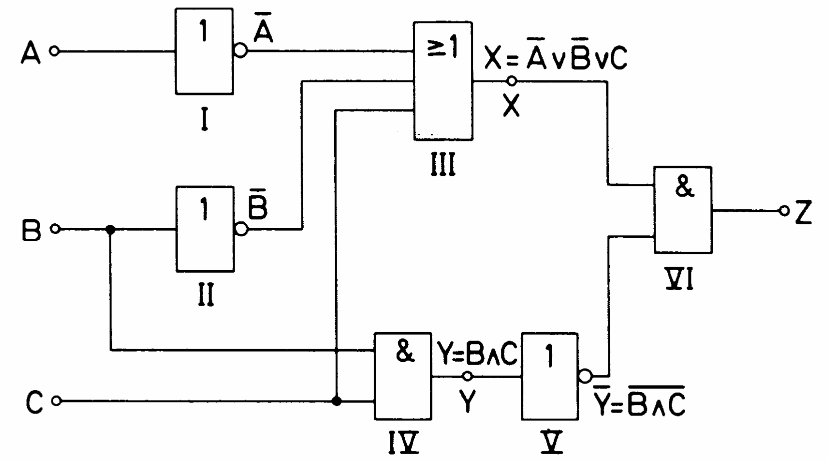
4 Schaltungsanalyse

4 Schaltungsanalyse
4.1 Wahrheitstabellen
4.2 Funktionsgleichungen

Die Funktionszuordnung einzelner Verknüpfungsglieder innerhalb zusammengesetzter Digitalschaltungen bezeichnet man als Schaltungsanalyse.

4.1 Wahrheitstabellen

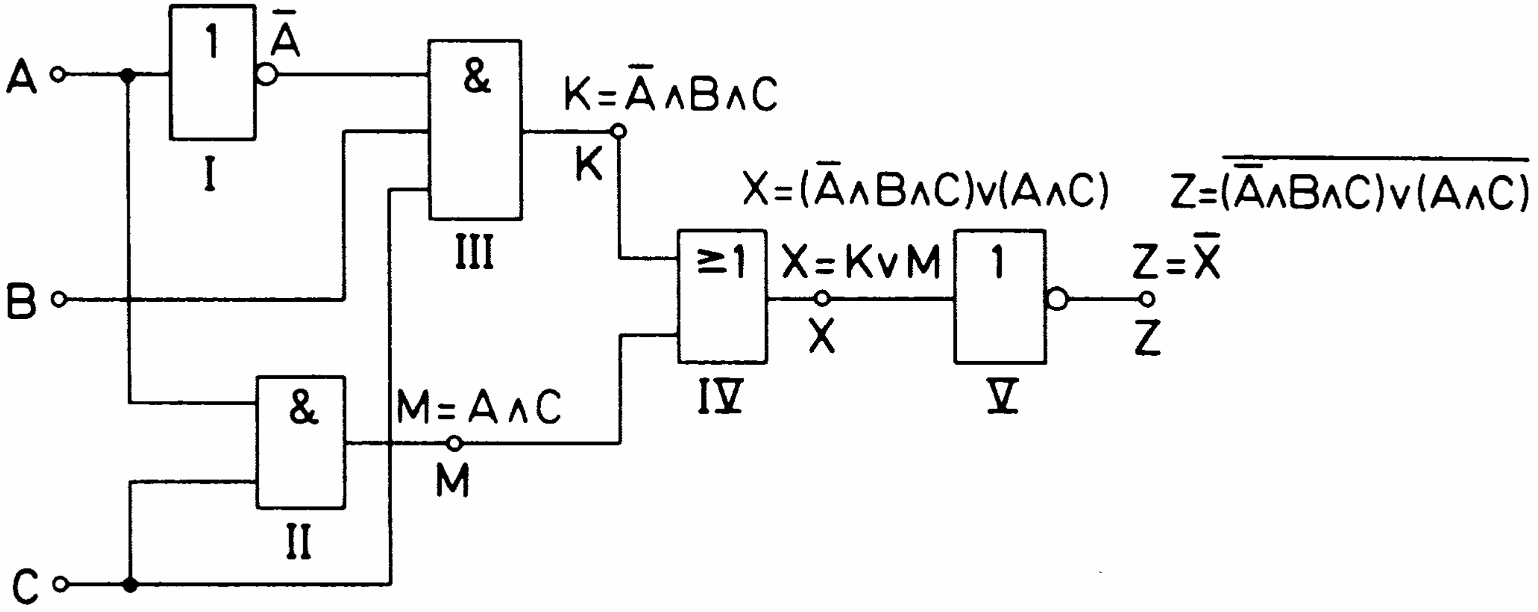
Zu jeder digitalen Schaltung Kann eine Wahrheitstabelle Erstellt werden.



Fall	C	B	A	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$X = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$	$Y = B \wedge C$	$\bar{Y}$	$Z = X \wedge \bar{Y}$
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1	1
4	0	1	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	1	1	1	0	1	1
6	1	0	1	0	1	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	1	1	0	0
8	1	1	1	0	0	1	1	0	0

4.2 Funktionsgleichungen

Zu jeder digitalen Schaltung kann eine Funktionsgleichung erstellt werden.



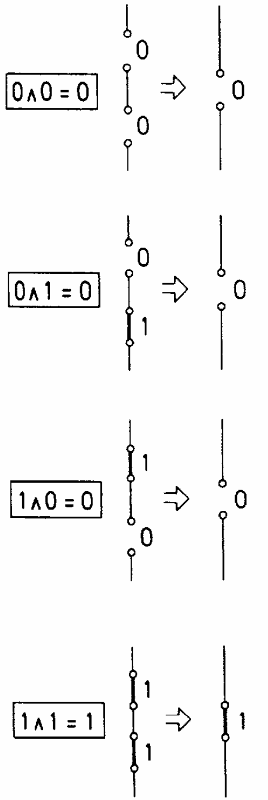
5 Schaltalgebra

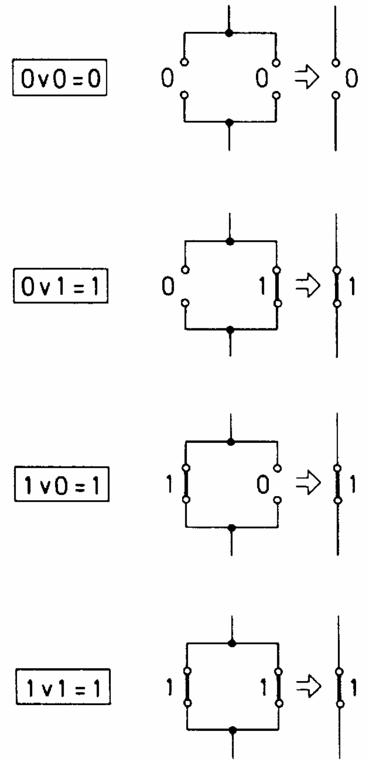
5 Schaltalgebra

- 5.1 Grundgesetze
- 5.2 Rechenregeln
- 5.3 NAND- und NOR-Funktion
- 5.4 Rechenbeispiele

Mit Hilfe der Schaltalgebra oder auch Bool´schen Algebra (nach dem engl. Mathematiker „Boole“) lassen sich Digitalschaltungen berechnen und weitgehend vereinfachen.

5.1 Grundgesetze Schaltalgebra





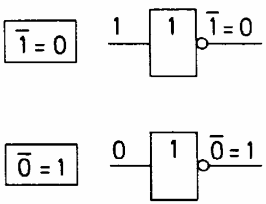


Bild 4.3 Postulate der UND-Verknüpfung

Bild 4.4 Postulate der ODER-Verknüpfung

Bild 4.5 Postulate der NICHT-Verknüpfung

5.2.1 Theoreme (i)

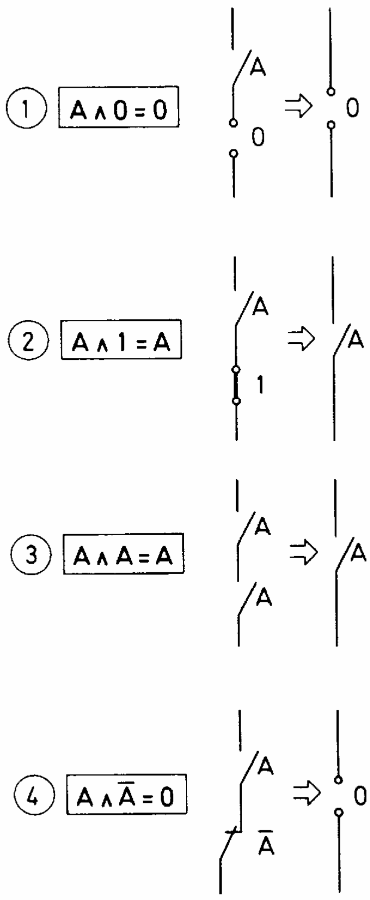
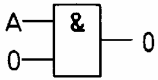
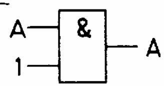


Bild 4.6 Theoreme der UND-Verknüpfung

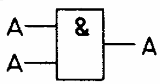
Fall	A	0	$Z=A\wedge 0=0$
1	0	0	0
2	1	0	0



Fall	A	1	$Z=A\wedge 1=A$
1	0	1	0
2	1	1	1



Fall	A	A	$Z=A\wedge A=A$
1	0	0	0
2	1	1	1



Fall	A	$\bar{A}$	$Z=A\wedge \bar{A}=0$
1	0	1	0
2	1	0	0

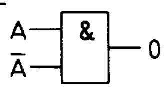


Bild 4.7 Ableitung der Theoreme der UND-Verknüpfung mit Wahrheitstabellen

5.2.1 Theoreme (ii)

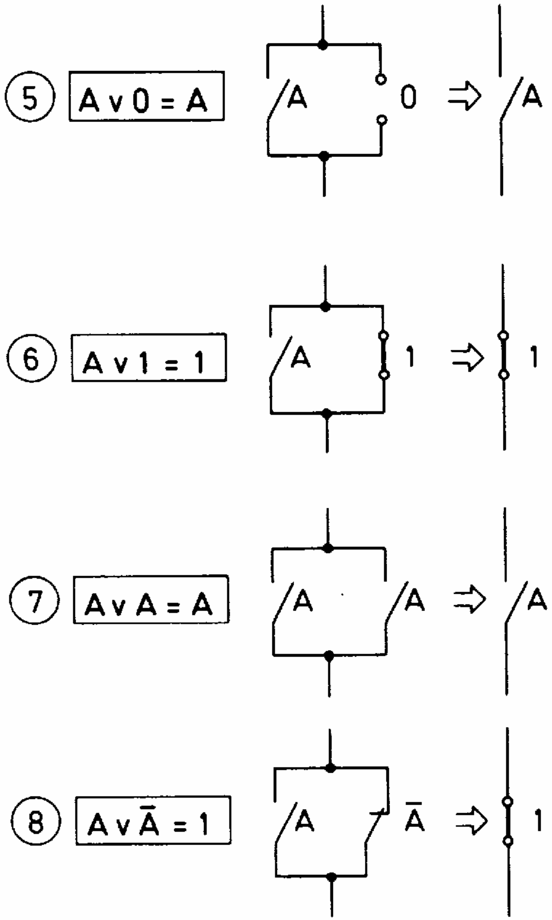


Bild 4.8 Theoreme der ODER-Verknüpfung

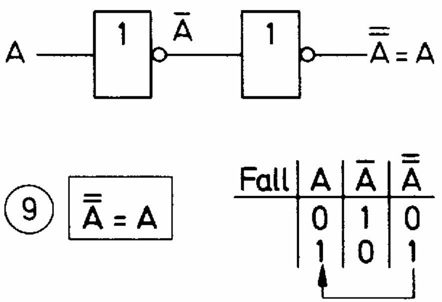


Bild 4.9 Theoreme der NICHT-Verknüpfung

5.2.2 Kommutativgesetz

Bild 4.10 Kommutativgesetz der UND-Verknüpfung

(10) $Z = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B$

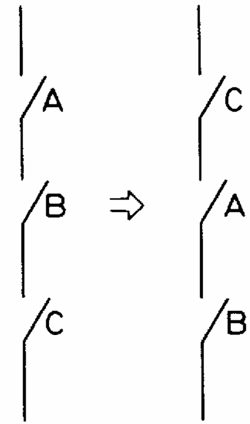
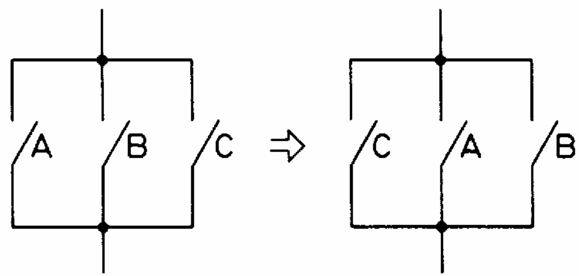


Bild 4.11 Kommutativgesetz der ODER-Verknüpfung



(11) $Z = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B$

5.2.3 Assoziativgesetz

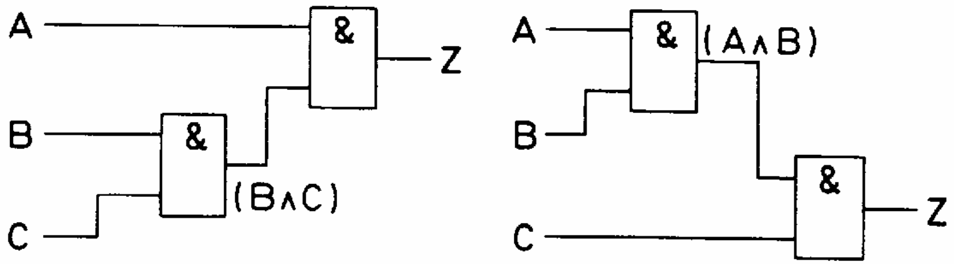


Bild 4.12 Assoziativgesetz der UND-Verknüpfung

(12) $\boxed{Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C}$

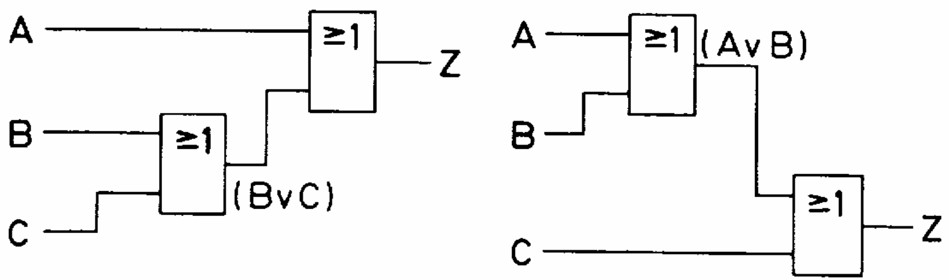
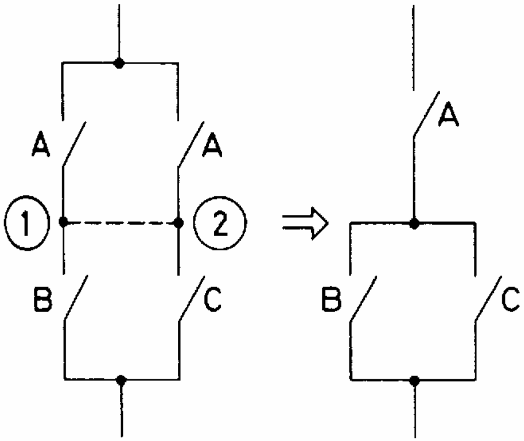


Bild 4.13 Assoziativgesetz der ODER-Verknüpfung

(13) $\boxed{Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C}$

5.2.4 Distributivgesetz (i)



$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$

Bild 4.14 Konjunktives Distributivgesetz

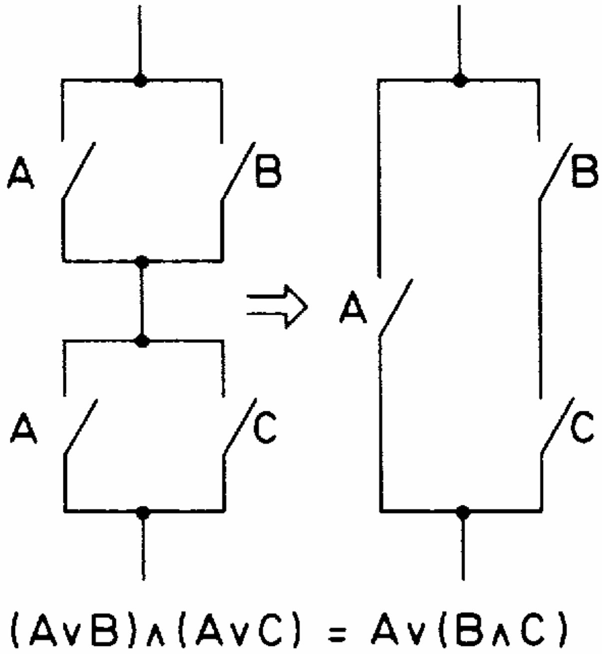
Fall	C	B	A	$A \wedge B$	$A \wedge C$	x: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$B \vee C$	y: $A \wedge (B \vee C)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0
4	0	1	1	1	0	**1**	1	**1**
5	1	0	0	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	1	**1**	1	**1**
7	1	1	0	0	0	0	1	0
8	1	1	1	1	1	**1**	1	**1**

$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$

Bild 4.15 Überprüfung der Richtigkeit des konjunktiven Distributivgesetzes mit Wahrheitstabellen

5.2.4 Distributivgesetz (ii)

Bild 4.16 Disjunktives Distributivgesetz



5.3.1 NOR-Funktion

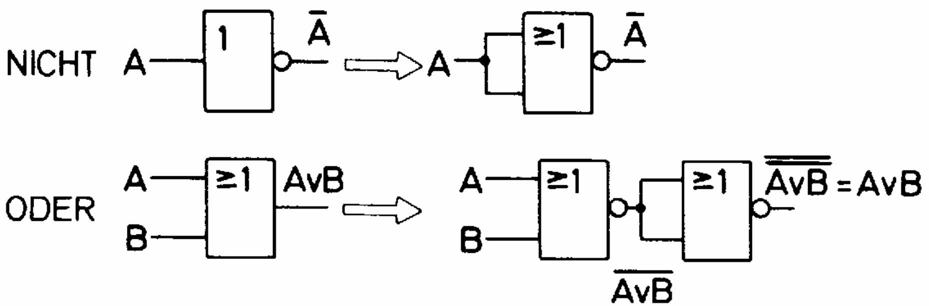


Bild 4.21 ODER-Schaltung und NICHT-Schaltung mit NOR-Gliedern aufgebaut

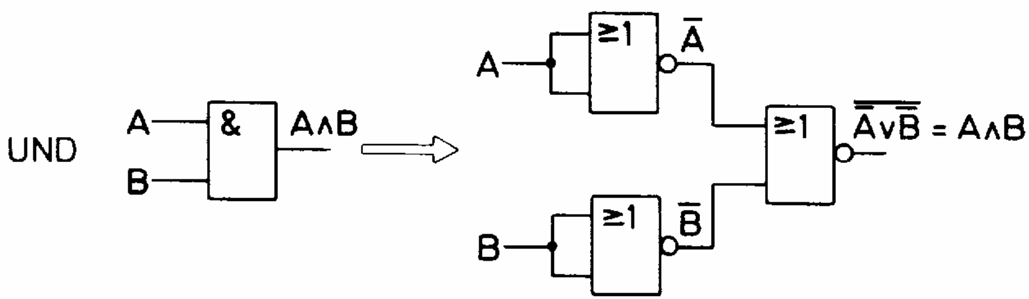


Bild 4.22 UND-Schaltung mit NOR-Gliedern aufgebaut

5.3.2 NAND-Funktion

Bild 4.23 NICHT-Schaltung und UND-Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut

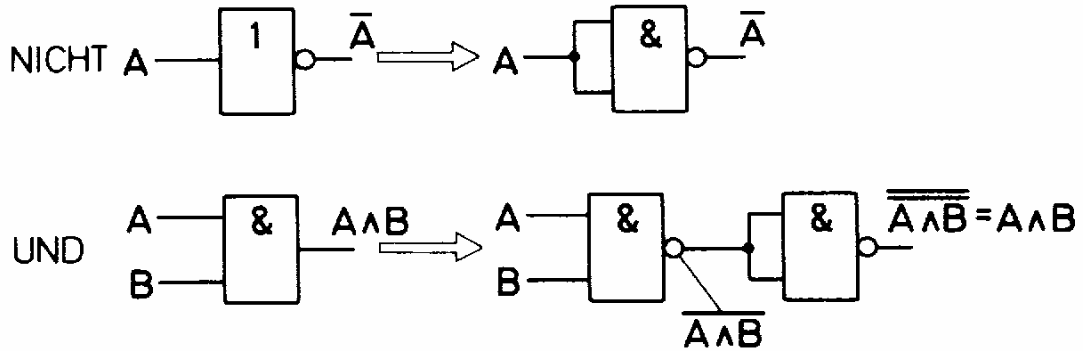
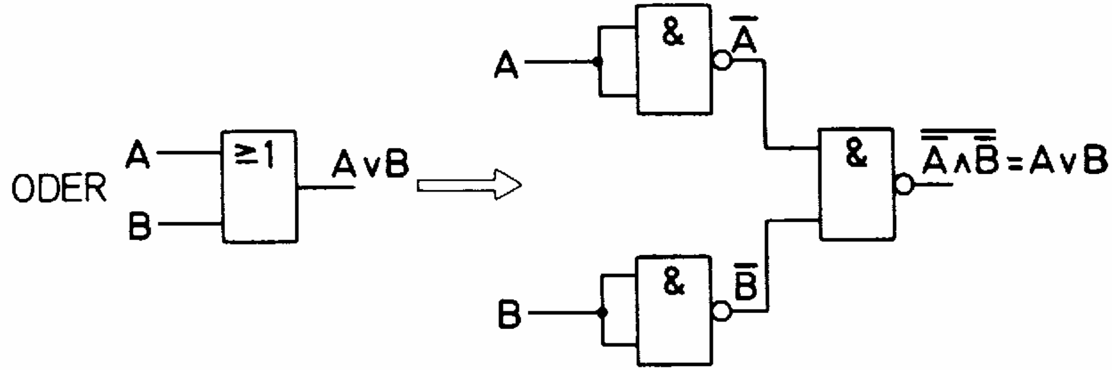


Bild 4.24 ODER-Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut



5.4 Rechenbeispiele (i)

Zusammenstellung der Theoreme und der Gesetze der Schaltalgebra

Theoreme

(1) $A \wedge 0 = 0$
(2) $A \wedge 1 = A$
(3) $A \wedge A = A$
(4) $A \wedge \overline{A} = 0$

(5) $A \vee 0 = A$
(6) $A \vee 1 = 1$
(7) $A \vee A = A$
(8) $A \vee \overline{A} = 1$

(9) $\overline{\overline{A}} = A$

Kommutativgesetze

(10) $A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B$
(11) $A \vee B \vee C = C \vee A \vee B$

Assoziativgesetze

(12) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
(13) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

5.4 Rechenbeispiele (ii)

Distributivgesetze

14 $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

15 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

14a $A \wedge (A \vee B) = A$

15a $A \vee (A \wedge B) = A$

Morgansche Gesetze

16 $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

17 $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

16a $\overline{A \wedge B \wedge C \wedge D} \wedge \cdots = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \cdots$

17a $\overline{A \vee B \vee C \vee D} \vee \cdots = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \cdots$

Die Gleichungen 14a und 15a sind Sonderfälle der Distributivgesetze. Sie ergeben sich wie folgt:

$$A \wedge (A \vee B) = (\underset{\substack{\uparrow \\ A \,=\, A \vee 0}}{A \vee 0}) \wedge (A \vee B) = A \vee (\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \wedge B \,=\, 0}}{0 \wedge B}) = A \vee 0 = A$$

$$A \vee (A \wedge B) = (\underset{\substack{\uparrow \\ A \,=\, A \wedge 1}}{A \wedge 1}) \vee (A \wedge B) = A \wedge (\underset{\substack{\downarrow \\ 1 \vee B \,=\, 1}}{1 \vee B}) = A \wedge 1 = A$$

6 Schaltungsvereinfachung

6 Schaltungsvereinfachung

6.1 ODER- Normalform
6.2 UND-Normalform
6.3 KV-Diagramme

Bei der sogenannten Schaltungssynthese (Schaltungsentwurf) ist die aufgestellte Wahrheitstabelle bzw. die entstehende Funktionsgleichung weitestgehend zu vereinfachen, um den Aufwand an den Verknüpfungsgliedern so gering wie möglich zu halten.

6.1 ODER-Normalform

Bei der ODER-Normalform führt jede „1“ in der Ausgangsspalte zu einer UND-Verknüpfung der Eingänge, in der Form, dass die Bedingung „wahr“ ist.
Diese UND-Verknüpfungen werden anschließend „ODER“ verknüpft.

Fall	B	A	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$Z_1 = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$
1	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	1

$$\boxed{Z_1 = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})}$$

6.2 UND-Normalform

Bei der UND-Normalform führt jede „0“ in der Ausgangsspalte zu einer ODER-Verknüpfung der Eingänge, in der Form, dass die Bedingung „wahr“ ist.
Diese ODER-Verknüpfungen werden anschließend „UND“ verknüpft.

Fall	B	A	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\bar{Z}_1 = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$
1	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	1

$$\boxed{\bar{Z}_1 = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})}$$

6.3 KV-Diagramme (i)

KV-Diagramme dienen der übersichtlichen Darstellung und Vereinfachung der ODER-Normalform.

Sie wurden von Karnaug und Veith entwickelt und werden auch als Karnaugh-Diagramme bezeichnet.

6.3 KV-Diagramme (ii)

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze, wie Vollkonjunktionen (alle vorkommenden UND-Verknüpfungen) möglich sind.

	A	$\bar{A}$
B		
$\bar{B}$		

Bild 5.12 KV-Diagramm für 2 Variable (A, B)

	A	$\bar{A}$
B	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge B$
$\bar{B}$	$A \wedge \bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$

Bild 5.13 KV-Diagramm für 2 Variable (A, B) mit Eintrag der Vollkonjunktionen

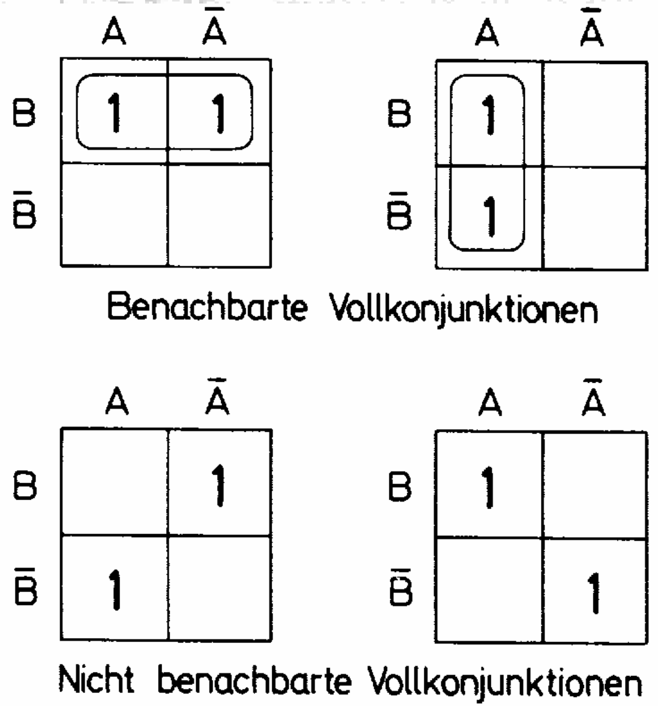
6.3 KV-Diagramme (ii)

Eine „1“ wird entsprechend der Variablen-Verknüpfungen eingetragen, welche die Bedingung Z(Ausgang)=1 erfüllen. (siehe auch ODER-Normalform)
Benachbarte Vollkonjunktionen (1) Können zusammengefasst werden.

Dabei fallen die Variablen weg, Die sich ändern.

Alle entstandenen Funktions-gleichungen werden anschließend „ODER“-verknüpft.

Beim Übergang von einem Feld Zum nächsten darf sich nur eine Variable ändern.



6.3 KV-Diagramme (iv)

Die Zuordnung der Variablen zu den Koordinaten des Diagramms kann beliebig erfolgen.

Darstellung für 3 Variablen.

Fall	C	B	A	Z		
1	0	0	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
2	0	0	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
3	0	1	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$
4	0	1	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge B \wedge \bar{C}$
5	1	0	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$
6	1	0	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge \bar{B} \wedge C$
7	1	1	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge B \wedge C$
8	1	1	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge B \wedge C$

Bild 5.24 Mögliche Vollkonjunktionen bei 3 Variablen

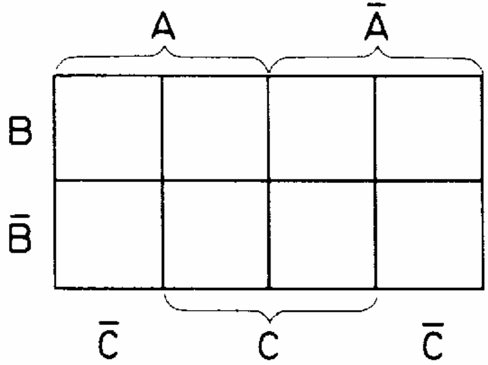
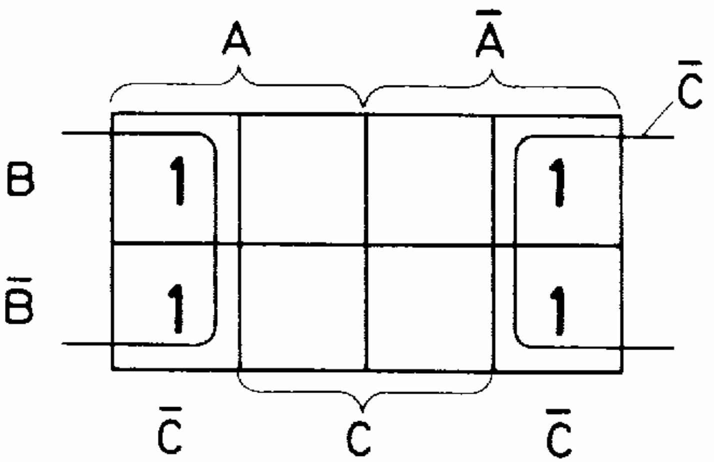


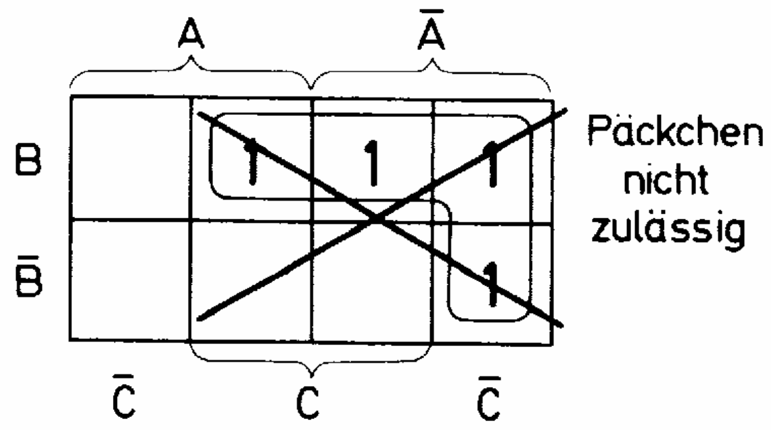
Bild 5.25 KV-Diagramm für 3 Variable

6.3 KV-Diagramme (v)

Benachbarte Einsen können auch räumlich zusammengefaßt werden (hintenrum).



RICHTIG ☺



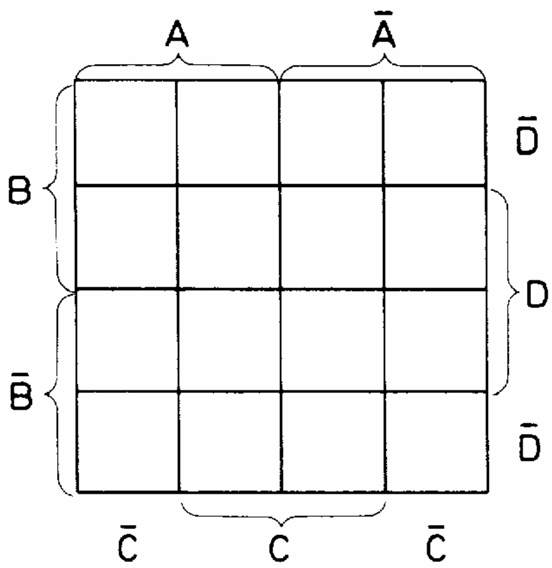
FALSCH ☹

6.3 KV-Diagramme (vi)

Darstellung für 4 Variablen.

Fall	D	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
2	0	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
3	0	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
4	0	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
5	0	1	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \wedge \bar{D}$
6	0	1	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge C \wedge \bar{D}$
7	0	1	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge C \wedge \bar{D}$
8	0	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge \bar{D}$
9	1	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge D$
10	1	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge D$
11	1	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D$
12	1	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D$
13	1	1	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \wedge D$
14	1	1	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge C \wedge D$
15	1	1	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D$
16	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D$

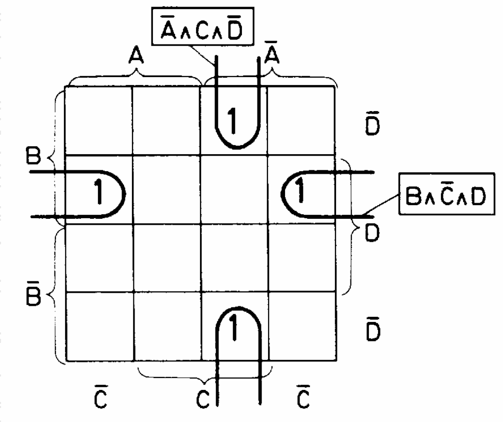
Bild 5.33 Mögliche Vollkonjunktionen bei 4 Variablen



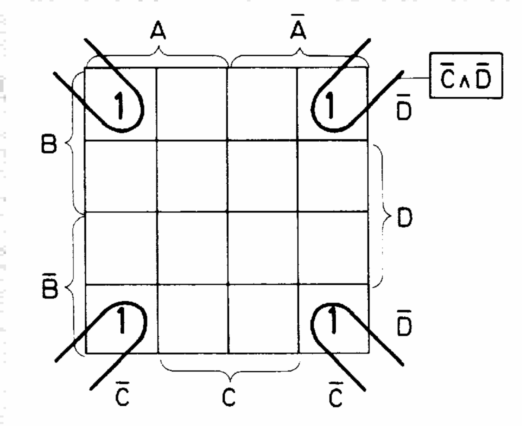
6.3 KV-Diagramme (vii)

Weitere Möglichkeiten der Zusammenfassung.

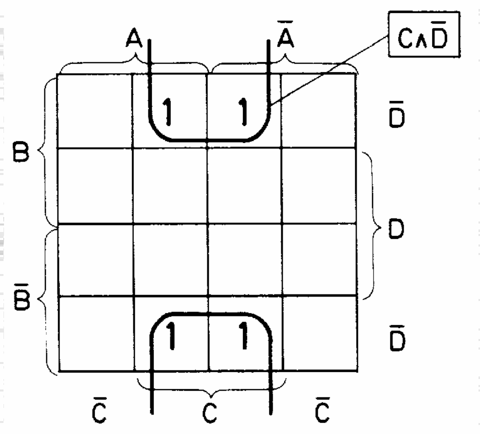
1)



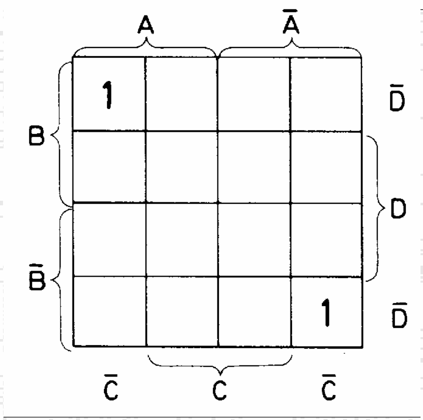
2)



3)



Nicht Möglich!



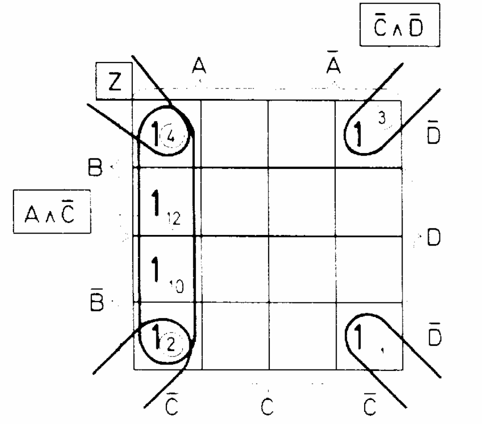
6.3 KV-Diagramme (viii)

Beispiel: Schrittweise Schaltungsentwicklung

1)

Fall	D	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
2	0	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
3	0	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
4	0	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
5	0	1	0	0	0	
6	0	1	0	1	0	
7	0	1	1	0	0	
8	0	1	1	1	0	
9	1	0	0	0	0	
10	1	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge D$
11	1	0	1	0	0	
12	1	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D$
13	1	1	0	0	0	
14	1	1	0	1	0	
15	1	1	1	0	0	
16	1	1	1	1	0	

2)



3) $Z = (\bar{C} \wedge \bar{D}) \vee (A \wedge \bar{C}) = \bar{C} \wedge (A \vee \bar{D})$

4)

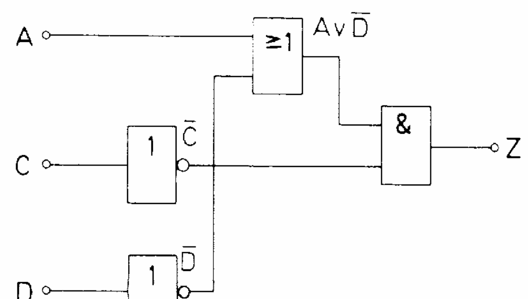
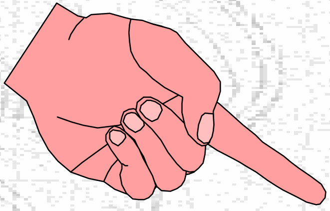


Bild 5.41 Schaltung

ENDE des 2.Teils . . . .



i Exit

Sonderformen logischer Grund-glieder

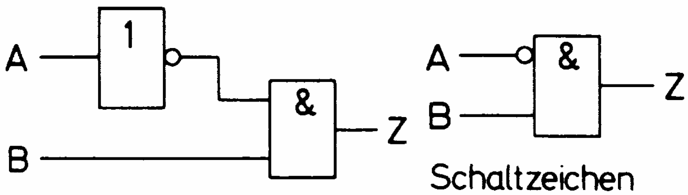


Bild 2.26 Entstehung der Verknüpfung «Inhibition A» und Schaltzeichen

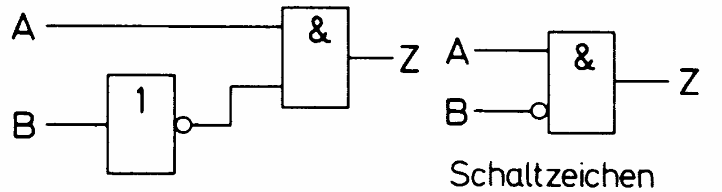


Bild 2.27 Entstehung der Verknüpfung «Inhibition B» und Schaltzeichen

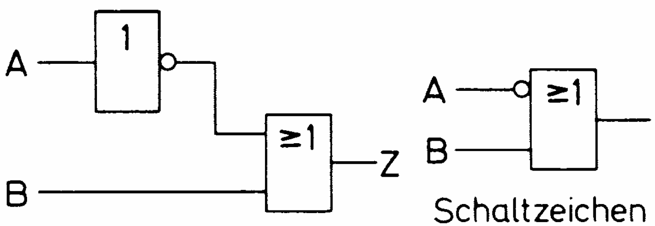


Bild 2.28 Entstehung der Verknüpfung «Implikation A» und Schaltzeichen

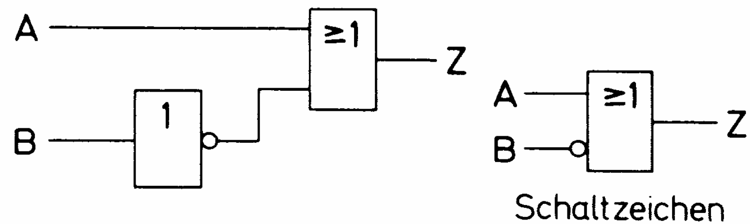


Bild 2.29 Entstehung der Verknüpfung «Implikation B» und Schaltzeichen

i EXIT

Zahlensysteme - Übungen

Umwandlung: ***Dual*** → ***Dezimal***

1. Welcher Unterschied besteht zwischen den Begriffen «binär» und «dual»?
2. Die in der Tabelle 8.42 dargestellten Dualzahlen sind in Dezimalzahlen umzuwandeln.

Bild 8.42 Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen

Dezimal-ziffer	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	4 096	2 048	1 024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
								1	1	0	0	1	0
						1	1	0	1	0	1	1	1
						1	0	1	0	1	1	0	0
				1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
				1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
			1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
		1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
		1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0

EXIT

Zahlensysteme - Übungen

Umwandlung: ***Dezimal*** → ***Dual***

3. Die folgenden Dezimalzahlen sollen in Dualzahlen umgewandelt werden:

58
512
1 298
1 983
20 000
17 750
2 730
9 990
11 000
32 000

2/2

i EXIT

Zahlensysteme - Übungen

Addition von Dualzahlen

5. Addition im dualen Zahlensystem. Lösen Sie bitte folgende Aufgaben durch duale Addition. Prüfen Sie die Ergebnisse durch Umwandeln der Zahlen ins Dezimalsystem nach.

a) $\begin{array}{r} 1101 \\ +\,100 \\ \hline ? \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 111101 \\ +\ 1001 \\ \hline ? \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11011 \\ +\ 100100 \\ \hline ? \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 110001 \\ +\ 11101 \\ \hline ? \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 111100 \\ +\ 1100111 \\ \hline ? \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 110011 \\ +\,1010100 \\ \hline ? \end{array}$

Zahlensysteme - Übungen

Subtraktion von Dualzahlen

6. Subtraktion im dualen Zahlensystem. Die Aufgaben sollen durch Addition des Komplements gelöst werden.

a) $\begin{array}{r} 1101 \\ -\ 100 \\ \hline ? \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 111101 \\ -\ 1001 \\ \hline ? \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11011 \\ -\ 1111 \\ \hline ? \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 1001100 \\ -\ 101010 \\ \hline ? \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 100111 \\ -\ 10111 \\ \hline ? \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 110011 \\ -\ 11010 \\ \hline ? \end{array}$ g) $\begin{array}{r} 111000 \\ -\ 10011 \\ \hline ? \end{array}$ h) $\begin{array}{r} 1101 \\ -\ 10100 \\ \hline ? \end{array}$

1/1

i EXIT

Zahlensysteme - Übungen

BCD - Kodierung

7. Die Dezimalzahlen:

a) 10 941
b) 3 890
c) 7 863
d) 98 001
e) 7 989

sollen in den BCD-Kode überführt werden.

1/1

EXIT

Zahlensysteme - Übungen

Umwandlung: ***Hexadezimal*** ⟷ ***Dezimal*** ⟷ ***Dual***

10. Die Hexadezimalzahlen sind in Dezimalzahlen und Dualzahlen zu verwandeln:

a) AB1	b) 87F2	c) E605	d) BCD4
e) 12B31	f) BA1A	g) 31 459	h) 1A1B

11. Die Dezimalzahlen sind in Hexadezimalzahlen und Dualzahlen zu verwandeln:

a) 100	b) 259	c) 1 020	d) 1 983
e) 10 000	f) 126	g) 18 020	h) 999

1/1

EXIT